**Tema 1.3: Axiomas de probabilidad.**

**Motivación del tema.** Es claro, a través de nuestra experiencia, que hay muchos experimentos estocásticos en los que no hay equiprobabilidad o que no es posible utilizar la fórmula de Laplace para calcular una probabilidad, por ejemplo, una empresa dedicada a la búsqueda de petróleo encuentra petróleo o gas natural( que lo representamos como un éxito ) en de sus perforaciones y . La compañía perfora dos pozos, los cuatro eventos simples posibles y tres de sus probabilidades asociadas son:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Evento Simple | Resultado de  1ª perforación | Resultado de  2ª perforación | Probabilidad |
|  | Éxito | Éxito |  |
|  | Éxito | Fracaso | ¿? |
|  | Fracaso | Éxito |  |
|  | Fracaso | Fracaso |  |

Bajo este supuesto nos preguntamos ¿qué fórmulas vamos a emplear ahora? ¿qué procedimientos debemos seguir? La respuesta nos la da el modelo axiomático de la probabilidad, el cual nos da la libertad de asignarle la probabilidad a los eventos, pero para que realmente estemos haciendo probabilidad nuestra asignación de probabilidad debe satisfacer ciertas propiedades básicas llamadas axiomas y también nos dice que otras fórmulas podemos usar para calcular más probabilidades.

Continuando con el ejercicio de arriba podemos calcular , donde la asignación de la probabilidad la hacemos como

Uno de los axiomas que debe cumplir nuestra forma de calcular probabilidades es que si es el espacio muestral entonces

que lo comprobamos haciendo la suma de los números de la última columna . Otro de los axiomas es que si y son eventos ajenos entonces

Podemos utilizar esta propiedad para calcular la probabilidad de encontrar petróleo en por lo menos un pozo con la suma .

Ahora continuamos sobre qué es la modelación axiomática de la probabilidad. En matemáticas es común desarrollar una teoría siguiendo el modelo axiomático, este consiste en dar un reducido número de proposiciones que funcionan como los axiomas y a partir de ellos deducir todas las propiedades de la teoría. Este procedimiento lo utilizó Euclides para desarrollar axiomáticamente a la geometría, también el álgebra se desarrolló axiomáticamente planteando los axiomas de campo de los números reales. La probabilidad fue también desarrollada axiomáticamente por el matemático ruso Kolmogórov



En este tema damos los axiomas de probabilidad y a partir de ellos deducimos más fórmulas para calcular probabilidades, estas fórmulas se llaman teoremas y se deben demostrar a partir de los axiomas.

**Definición 1.** Sea un espacio muestral, A la clase de todos los eventos y sea una función de valores reales definida en A. Entonces se llama una *función de probabilidad*, y se denomina la probabilidad del evento , cuando se cumplen los axiomas:

[A1] Para cualquier evento , .

[A2] Para el evento seguro, .

[A3] Para dos eventos ajenos y se tiene

P[3’] Para cualquier secuencia infinita de eventos mutuamente excluyentes se tiene:

**Definición 2.** A la terna se le llama *espacio de probabilidad*.

**Propiedades de los espacios de probabilidad.**

**Teorema 1**: El evento imposible o, en otras palabras el conjunto vacío Ø, tiene probabilidad cero, es decir,

.

**Demostración.** Podemos hacer los siguientes pasos:

1. , por propiedades de conjuntos
2. , sacando probabilidad a la igualdad en 1.
3. , por el axioma P3 pues y son ajenos.
4. , pasando al primer miembro en 3.
5. , simplificando en 4.

**Teorema 2**. **Regla del complemento**. Para cualquier evento , se tiene

**Demostración.** Hacemos los siguientes pasos:

1. , donde y son mutuamente excluyentes.
2. , sacando probabilidad en 1.
3. , por los axiomas P2 y P3.
4. , pasando al primer miembro en 3.

**Teorema 3.** Para cualquier evento , se tiene

.

**Demostración.** Los siguientes pasos nos llevan a la demostración

1. , por P1
2. , por P1
3. , sustituyendo por en 2
4. , pasando 1 al segundo miembro en 3
5. , multiplicando por -1 la desigualdad de 4 y cambiando la desigualdad.
6. , juntando 1 y 5.

**Teorema 4.** Si , entonces .

**Prueba:** Si entonces, como lo indica la figura 1, , donde y son mutuamente excluyentes. De donde:

o

Por [P1], se tiene ; de donde , entonces .

Figura 1

**Teorema 5.** Para dos eventos cualquiera y ,

**Prueba:** Como se ve en la figura 1 , donde y son ajenos. En consecuencia, por [P3], de donde se obtiene nuestro resultado.

**Teorema 6. Regla de adición.** Para dos eventos cualesquiera y :

**Prueba:** Como se ve en la figura 2 , donde y son ajenos. Por tanto utilizando el teorema 5

que es nuestro resultado.

**Teorema 7:** Para cualquiera eventos A, B, C se tiene

**Ejercicios.**

1. Demuestre el teorema 7.
2. Demuestre que
3. Demuestre que
4. Demuestre que .
5. Si entonces

**Tema 1.3.1 Espacios de probabilidad finitos.**

**1.3.4 Espacios de probabilidad finitos.**

**Definición 3**. **Espacios Muestrales Finitos**. Supongamos que tenemos un fenómeno aleatorio con un espacio muestral finito . Un modelo de probabilidad finito se obtiene asignando a cada punto en un número real , llamado probabilidad de que satisface las siguientes propiedades.

i.- .

ii.-

iii. La probabilidad de un evento se define como la suma de las probabilidades de los puntos que están en A.

Se denomina tabla de distribución de probabilidad a la tabla en que aparecen los puntos del espacio muestral finito y las probabilidades asignadas

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Resultado |  |  |  |  |
| Probabilidad |  |  |  |  |

**Ejemplo 1.** Experimento. Lance al aire tres monedas y observe el número de caras que se obtienen. Entonces el espacio muestral es

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Resultado | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Probabilidad |  |  |  |  |

Sea A el evento en el cual aparezca al menos una cara, y sea B el evento en el cual aparezcan todas las caras o todos los sellos. Calcular y

**Solución.** Como

A= {1, 2,3) y B= {0,3}

Entonces por definición

P(A)= P (1) + P (2) + P (3)=

P (B)= P (0) + P (3) =

**Ejemplo 2.**Tres caballos A, B y C están en una carrera; A tiene el doble de probabilidad de ganar que B, y B tiene el doble de probabilidad de ganar que C.

1. Encuentre sus respectivas probabilidades de ganar, es decir P(A), P (B), P(C).
2. Encuentre la probabilidad de que B o C ganen.

**Solución.** Para el inciso “a” tenemos que

, y

por lo tanto tenemos que

Entonces por la definición 4.ii tenemos

Por lo tanto tenemos las probabilidades correspondientes.

y

Para el inciso “b” tenemos que la probabilidad es dada por B o C. Por lo tanto las probabilidades se suman.

P({B, C}) = P(B) + P(C)= 3/7.

**Ejercicios.**

1. Un espacio muestral consta de 3 puntos con probabilidades y , respectivamente. Encuentre el valor de .

Respuesta: .

1. Sea una función de probabilidad en . Encuentre si y .

Respuesta: 0.2

1. Hay 3 estudiantes A,B y C en una competencia de natación. A y B tienen la misma probabilidad de ganar y cada uno tiene el doble de probabilidad de ganar que C. Encuentre la probabilidad de que (a) B gane, (b) C gane, (c) B o C gane.

Respuesta: (a) 2/5, (b) 1/5, (c) 3/5.

1. El peso de un dado ha sido alterado de manera que los resultados producen la siguiente distribución de probabilidad

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Resultado | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Probabilidad | 0.1 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |

Calcule las probabilidades: (a) P(número par), (b) P(2,3,4,5), (c) , (d)

Respuesta: (a) 0.6, (b) 0.7, (c) 0.4, (d) 0.

**1.3.5 Espacios muéstrales infinitos contables.**

**Definición 4.** Suponga que un experimento estocástico tiene un espacio muestral infinito contable , es decir, un espacio de la forma

Entonces como en el caso finito, se obtiene un espacio de probabilidad al asignar a cada un número real llamado su probabilidad de manera que:

* La probabilidad de un evento es la suma de las probabilidades de sus puntos, es decir,

**Ejemplo 3:** Considere el espacio muestral del experimento de lanzar una moneda hasta que aparezca cara; aquí denota el número de veces que se lanza la moneda. El espacio de probabilidad se obtiene al fijar

Considere los eventos

y

Encuentre y .

**Solución.** La probabilidad de que en menos de tres lanzamientos salga cara es

P(A) = P(1,2,3) =

La probabilidad de que salga cara en un número par de lanzamientos es:

P(B) = P(2,4,6,8,…) =

Observe que es una serie geométrica con a= ¼ y r = 1/4, por lo tanto

**Ejemplo 4.** El siguiente ejemplo de un experimento aleatorio con espacio muestral infinito contable consiste en contar el número de partículas emitidas por un material radiactivo durante un periodo de tiempo . Antes del conteo no sabemos el número de partículas que van a ser emitidas, pues pueden ser emitidas partículas. El espacio muestral para cualquier es y con indicamos la probabilidad de que en el intervalo de tiempo hayan sido emitidas partículas entonces se sabe que

A la familia se le llama un proceso estocástico.

(a)Compruebe que , (b) calcule la probabilidad de que el material radiactivo emita más de 10 partículas.

**Solución.** (a) Para demostrar esto utilizamos la serie de la exponencial

Aplicando esta fórmula con obtenemos

Para (b) calculamos

donde hemos utilizado la fórmula de (a)

**Ejercicios.**

1. Un par de dados se lanzan repetidamente. Encuentre la probabilidad de que en el (a) primer lanzamiento se obtenga un 11, (b) segundo lanzamiento se obtenga un 11, (c) tercer lanzamiento se obtenga un 11, (d) escriba la tabla de la función de distribución de probabilidad, (e) ¿cuál es el mínimo de lanzamientos de los dados para que la suma de las probabilidades sea 0.5?

Respuesta: (a) , (b) , (c) , (e) 13

1. Lo mismo que en el ejercicio anterior, pero la suma ahora es 9.
2. Un experimento estocástico consiste en contar el número de errores que contiene una página de un libro. Al tomar una página no sabemos si vamos a encontrar **0** errores, **1** error, **2** errores, etc. Este ejemplo tiene un espacio muestral infinito contable

Supongamos que la probabilidad de cada resultado elemental está dada por

1. Compruebe que , (b) ¿cuál es la probabilidad de que haya por lo menos 6 errores?

Respuesta: (b) 0.0045

**1.3.5. Espacios Muestrales Continuos.**

**Ejemplo 5.** experimento: deje caer un lápiz con una punta en una región rectangular y observe en que punto de la región la punta del lápiz toco. Aquí comprende todos los puntos de la región rectangular

**A B S**

Sean y los eventos en que el lápiz cae en las áreas correspondientes entonces

Este es un ejemplo de un espacio **muestral continuo**.

**Definición 5.** Un espacio muestral es continuo si es un subconjunto

* de ℝ que tiene longitud. En este caso es un evento si tiene longitud. En este caso la probabilidad se calcula como

* de que tiene área. En este caso es un evento si tiene área. En este caso la probabilidad se calcula como:

* de que tiene volumen. En este caso es un evento si tiene volumen. En este caso la probabilidad se calcula como:

**Ejemplo 6:** Se elige al azar un punto dentro de un rectángulo que mide 3 por 5 pulgadas. Encuentra la probabilidad p de que el punto esté por lo menos 1 pulgada hacia dentro del borde.

**Solución.** Sea el conjunto de puntos dentro del rectángulo y sea el conjunto de puntos que se encuentra al menos 1 pulgada dentro del borde. Observe que es un área rectangular que mide 1 pulgada por 3 pulgadas por lo tanto.

**Ejemplo 7.** Un chico invita a una chica, citándola en un bar entre las 6 y las 7 de la tarde. Quedan de verse, pero con la condición de no esperar más de 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?

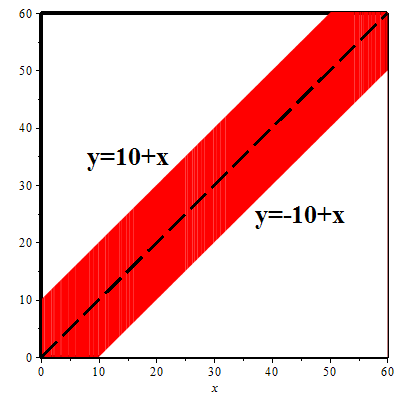
**Solución.** Representemos por los tiempos en que llegan la chica y el chico. El punto pertenece al cuadrado de lado 60 minutos. La condición de espera máxima se puede escribir como , y que se desdobla en dos desigualdades

o

o

o

Para visualizar qué región forman estas desigualdades, les ponemos el signo = y las dibujamos



Son 2 rectas de pendiente 1 y que pasan por los puntos y . Ahora tomamos cualquier punto que no esté en las rectas, por ejemplo , y sustituimos y en las desigualdades y utilizamos el siguiente criterio

Si al sustituir y en la desigualdad

esta resulta verdadera, se toma

la región donde está . Si la desigualdad

es falsa se toma la región opuesta.

Con respecto a la desigualdad obtenemos que es verdadera y por lo tanto tomamos la región debajo de la recta , que es donde está . Ahora con la desigualdad obtenemos , que es verdadera y por lo tanto tomamos la región arriba de la recta . Así la región que cumple con la desigualdad es la sombreada en la figura de arriba, entonces la probabilidad de que los jóvenes se encuentren es

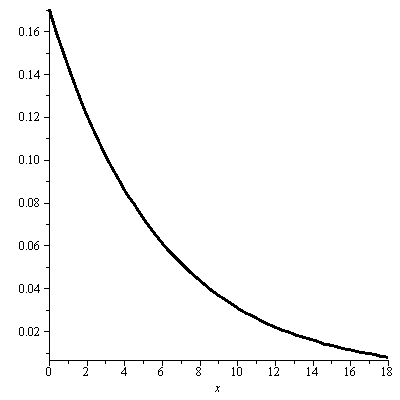
El área sombreada es 2 veces la siguiente área

Por lo tanto la probabilidad buscada es

**Ejemplo 8.** Un ejemplo más interesante de un experimento aleatorio con espacio muestral continuo consiste en la siguiente situación metereológica. Deseamos determinar la frecuencia con que aparecen los diferentes niveles de agua de lluvia en un pluviómetro durante la temporada de lluvias en una presa del sistema Cutzamala. Aunque conozcamos la presión barométrica, la velocidad del viento, la dirección de la tormenta, la temperatura, esto no permite saber cuánta agua de lluvia caerá. En este caso un modelo probabilístico describe la situación con mayor exactitud. Las estadísticas que se llevan nos ayudan a construir el siguiente histograma de frecuencias de los niveles de agua en un pluviómetro

Con base en este histograma procedemos a suavizarlo mediante una curva continua de ecuación

y su gráfica es como sigue:



Nuestro ajuste es correcto si al calcular, por ejemplo, el área bajo esta curva entre 9 y 12 concuerda con la frecuencia que tiene ese intervalo en el histograma, haciendo la integral obtenemos la frecuencia requerida.

**Ejercicios.**

1. En la figura las distancias son: y . Encuentre la probabilidad de seleccionar un punto en; , , en pero no en

**A B C D**

Respuesta: (a) 3/22, (b) 7/22, (c) 15/22.

1. Los camiones de una línea A pueden llegar a una parada dentro de un intervalo de tiempo de 8 minutos. En otra línea B los camiones pueden llegar dentro de un intervalo de tiempo de 12 minutos. Si llegamos a la parada en un momento cualquiera, calcular la probabilidad de que: (a) Pase un autobús (A o B) antes de 2 minutos. (b) El primer autobús que pase sea de la línea A.

Respuesta: (a) 3/8, (b) 2/3.

1. Con respecto al ejemplo 8 (a) compruebe que , (b) calcular , ¿concuerda con el histograma? (c) calcular , ¿concuerda con el histograma?